

**解法 1** 由于过点  $(-2, 0)$  且斜率为  $\frac{2}{3}$  的直线方程为  $y = \frac{2}{3}(x+2)$ .

$(x+2)$ .

由  $\begin{cases} y = \frac{2}{3}(x+2), \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=4, \\ y=4 \end{cases}$ , 抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦

点为  $(1, 0)$ ,

于是  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = (0, 2) \cdot (3, 4) = 8$ . 故选 D.

**解法 1** 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

由  $\begin{cases} y = \frac{2}{3}(x+2), \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ , 则  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 x_2 = 4. \end{cases}$

那么  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = (x_1 - 1, y_1) \cdot (x_2 - 1, y_2) = (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) + \frac{2}{3}(x_1 +$

$2) \cdot \frac{2}{3}(x_2 + 2) = \frac{13}{9}x_1 x_2 - \frac{1}{9}(x_1 + x_2) + \frac{25}{9} = 8$ . 故选 D.

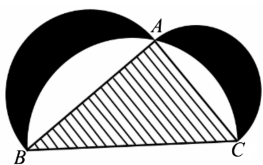
本题考查圆锥曲线与平面向量的基本运算, 解法一属于常规方法, 我常把此类解法称之为“强行突破”, 显然, 在这里是成功的. 解法二是利用根与系数关系进行转化, 这是解析几何中的基本技能之一, 它很多时候可以绕过复杂、繁冗的运算而直奔结论. 两种方法的繁简程度相似, 只要你动手了, 走哪条路都可以产生结果, 因此, 我说本题是和谐型试题.

## 2. 5. 文化背景型

理科第 10 题: 下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形  $ABC$  的斜边  $BC$ , 直角边  $AB$ ,  $AC$ .  $\triangle ABC$  的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为  $p_1, p_2, p_3$ , 则 ( )

- A.  $p_1 = p_2$     B.  $p_1 = p_3$   
C.  $p_2 = p_3$     D.  $p_1 = p_2 + p_3$

**分析与评** 设  $\triangle ABC$  的两直角边分别为  $b, c$ , 则区域 I



的面积为  $\frac{1}{2}bc$ . 区域 II 的面积为  $(\frac{1}{2}b)^2\pi + (\frac{1}{2}c)^2\pi - [(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2})^2$

$\pi - \frac{1}{2}bc] = \frac{1}{2}bc$ , 于是可选 A. 数学文化是近年走进数学试卷

的, 由于数学文化深刻的揭示数学的发生、发展的过程, 全面的展示数学美的方方面面, 因此, 它不仅会牢牢的守住这块阵地, 还有拓展阵地可能, 这点必须引起我们的重视.

## 2. 6. 抽象型

理科第 12 题: 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面  $\alpha$  所成的角相等, 则  $\alpha$  截此正方体所得截面面积的最大值为 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$     B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     C.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**分析与评** “每条棱所在直线与平面  $\alpha$  所成的角都相等”该平面  $\alpha$  在哪里? 可以作出来吗? 2016 年全国 I 卷文、理第

11 题: “平面  $\alpha$  过正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的顶点  $A$ ,  $\alpha \parallel$  平面  $CB_1D_1$ ,  $\alpha \cap$  平面  $ABCD = m$ ,  $\alpha \cap$  平面  $ABB_1A_1 = n$ , 则  $m, n$  所成角的正弦值为 \_\_\_\_\_” 可以作出直线  $m, n$  所成的角吗? 可以说这两题有异曲同工之妙, 都是很抽象, 想象起来很困难, 作图又很难下手.

抓本质是关键, 其实, 只要抓住过一个顶点的三条棱, 就抓住了所有的正方体的所有棱, 于是, 就是以该顶点这顶点, 以过该顶点的三条棱为侧棱的正三棱锥, 这样问题一下就解决了.

## 2. 7 综合创新性试题

理科第 20 题: 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为  $f(p)$ , 求  $f(p)$  的最大值点  $p_0$ .

(2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的  $p_0$  作为  $p$  的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

(i) 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为  $X$ , 求  $EX$ .

(ii) 以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

**分析与评** (1) 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为  $f(p) = C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18}$ . 因此,

$$f'(p) = C_{20}^2 [2p(1-p)^{18} - 18p^2(1-p)^{17}] = 2C_{20}^2 p(1-p)^{17}(1-10p).$$

令  $f'(p) = 0$ , 得  $p = 0.1$ . 当  $p \in (0, 0.1)$  时,  $f'(p) > 0$ ; 当  $p \in (0.1, 1)$  时,  $f'(p) < 0$ .

所以  $f(p)$  的最大值点为  $p_0 = 0.1$ .

(2) 由 (1) 知,  $p = 0.1$ .

(i) 令  $Y$  表示余下的 180 件产品中的不合格品件数, 依题意知  $Y \sim B(180, 0.1)$ ,  $X = 20 \times 2 + 25Y$ , 即  $X = 40 + 25Y$ . 所以  $EX = E(40 + 25Y) = 40 + 25EY = 490$ .

(ii) 如果对余下的产品作检验, 则这一箱产品所需要的检验费为 400 元.

由于  $EX > 400$ , 故应该对余下的产品作检验.

本题改变了前两年的命题风格, 变得“温柔”许多, 无论是题意理解还是具体计算, 可以说没难为考生的意思. 但本题确实是一道好题、是一道创新力度较大的题. 将概率与导数结合真的是很少见, 而在这里见了, 让人感到惊喜: 改革没有模式、创新不具一格.

## 2. 8 一题多解型

一题多解对开拓思路、启迪思维有重要作用. 能多解者, 一定是基础娴熟、技能全面. 教学中我们提倡一题多解, 要求